Tema 3
Problemas

Alfonso V. Ramallo

[1] Sea $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert bidimensional. Sea O el operador:

$$O = |1\rangle\langle 1| - 2\,|2\rangle\langle 2| + 3|1\rangle\langle 2| \ .$$

¿Puede O representar un observable?. Razonese la respuesta.

Solucion

Para que O sea un observable tiene que ser un operador hermitico. Calculemos $O^\dagger$ teniendo en cuenta que $\big(|n\rangle\langle m|\big)^\dagger = |m\rangle\langle n|$:

$$O^\dagger = |1\rangle\langle 1| - 2\,|2\rangle\langle 2| + 3|2\rangle\langle 1| \neq O \ .$$

Por lo tanto O **no puede ser un observable**.

[2] Una constante de movimiento es un observable cuyo valor esperado es constante en el tiempo. En un sistema de dos estados cuyo hamiltoniano es:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \ .$$

¿Es el observable representado por el operador:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

una constante de movimiento?.

Solucion

Segun el teorema de Ehrenfest, si $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle \;=\; -\frac{i}{\hbar}\langle\, [A,H]\,\rangle \;.$$

Por lo tanto para ser constante de movimiento se necesita que $[A,H] = 0$. En nuestro caso:

$$[A,H] \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-i & i+2 \\ 1 & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -i+2 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & i+1 \\ i-1 & 2i \end{pmatrix} \neq 0 \;.$$

Por lo tanto $[A,H] \neq 0$ y A **no es una constante de movimiento**.

[3] Una particula se encuentra en el instante $t = 0$ en el estado

$$|\psi(0)\rangle \;=\; \frac{3}{5}\,|1\rangle \;+\; \frac{4}{5}\,|2\rangle \;,$$

donde $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son autoestados ortonormales del hamiltoniano con energias E_1 y E_2. Calculese el valor esperado, para cualquier instante de tiempo $t \geq 0$, del operador:

$$O \;=\; |1\rangle\langle 2| \;+\; |2\rangle\langle 1| \;.$$

Solucion

Puesto que $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son estados estacionarios con energias E_1 y E_2, el vector de estado para $t > 0$ es:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{3}{5}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\,|1\rangle \;+\; \frac{4}{5}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\,|2\rangle \;.$$

Su conjugado es:

$$\langle\psi(t)| \;=\; \frac{3}{5}\,e^{\frac{i}{\hbar}E_1 t}\,\langle 1| \;+\; \frac{4}{5}\,e^{\frac{i}{\hbar}E_2 t}\,\langle 2| \;.$$

El operador O actua sobre los estados estacionarios en la forma:

$$O\,|1\rangle \;=\; |2\rangle \;, \qquad\qquad O\,|2\rangle \;=\; |1\rangle \;.$$

En consecuencia:

$$O\,|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{3}{5}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\,|2\rangle \;+\; \frac{4}{5}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\,|1\rangle \;,$$

Por lo tanto el valor esperado del operador O es:

$$\langle O \rangle \;=\; \langle \psi(t)|O|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{12}{15}\left[e^{\frac{i}{\hbar}\,(E_1-E_2)\,t} \;+\; e^{-\frac{i}{\hbar}\,(E_1-E_2)\,t}\right] .$$

Es decir:

$$\boxed{\langle O \rangle \;=\; \frac{24}{25}\,\cos\left[\frac{E_1-E_2}{\hbar}\,t\right]}$$

[4] Una particula de espin 1/2 interacciona con un campo magnetico B orientado en la direccion del eje x a traves del hamiltoniano:

$$H \;=\; -\gamma\, s_x\, B \;,$$

siendo γ una constante y $s_x = \frac{\hbar}{2}\,\sigma_x$ la componente x del espin de la particula. En el instante $t=0$ la particula esta en un estado en el cual la componente z del espin vale $+\frac{\hbar}{2}$. En el instante $t>0$ medimos el espin en la direccion de $\vec{n}$, siendo $\vec{n}$ un vector unitario en el plano yz. Obtengase la probabilidad de medir los diferentes valores de $s_{\vec{n}} = \frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ y el valor medio de $s_{\vec{n}}$. Expresese el resultado como funcion del tiempo t y del angulo θ formado por $\vec{n}$ y la direccion positiva del eje z.

Solucion

El hamiltoniano de la particula esta dado por la matriz

$$H \;=\; -\frac{\gamma\,\hbar\,B}{2}\,\sigma_x \;=\; -\frac{\gamma\,\hbar\,B}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Representemos el vector de estado en la forma:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \\ a_2(t) \end{pmatrix} .$$

Escribamos la ecuacion de Schrödinger $i\hbar\frac{d|\psi\rangle}{dt} = H\,|\psi\rangle$ en forma matricial:

$$i\hbar\begin{pmatrix} \frac{da_1}{dt} \\ \\ \frac{da_2}{dt} \end{pmatrix} \;=\; -\frac{\gamma\,\hbar\,B}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \;=\; -\frac{\gamma\,\hbar\,B}{2}\begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} .$$

Esta ecuacion es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$i\,\frac{da_1}{dt} \;=\; -\frac{\gamma\,B}{2}\,a_2 \;, \qquad\qquad i\,\frac{da_2}{dt} \;=\; -\frac{\gamma\,B}{2}\,a_1 \;.$$

Derivando la primera de estas ecuaciones y substituyendo en el resultado la segunda de ellas, tenemos:

$$i\,\frac{d^2a_1}{dt^2} \;=\; -\frac{\gamma B}{2}\,\frac{da_2}{dt} \;=\; -\frac{\gamma B}{2}\left[i\,\frac{\gamma B}{2}\,a_1\right] \;=\; -i\Big(\frac{\gamma B}{2}\Big)^2\,a_1 \ .$$

Es decir:

$$\frac{d^2a_1}{dt^2} \;+\; \Big(\frac{\gamma B}{2}\Big)^2\,a_1 \;=\; 0 \ .$$

La solucion general de esta ecuacion es:

$$a_1 \;=\; A\,e^{i\frac{\gamma B}{2}t} \;+\; B\,e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} \ ,$$

siendo A y B constantes. Substituyendo esta solucion en el segundo miembro de la segunda de la ecuaciones del sistema obtenemos:

$$i\,\frac{da_2}{dt} \;=\; -\frac{\gamma\,B}{2}\left[A\,e^{i\frac{\gamma B}{2}t} \;+\; B\,e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\right] \ ,$$

que puede integrarse como:

$$a_2 \;=\; A\,e^{i\frac{\gamma B}{2}t} \;-\; B\,e^{-i\frac{\gamma B}{2}t} \ .$$

En $t = 0$ debemos de tener:

$$a_1(t=0) \;=\; 1 \ , \qquad\qquad a_2(t=0) \;=\; 0 \ .$$

En nuestra solucion

$$a_1(t=0) \;=\; A \;+\; B \;=\; 1 \ , \qquad\qquad a_2(t=0) \;=\; A \;-\; B \;=\; 0 \ ,$$

que nos permite obtener las constantes A y B:

$$A \;=\; B \;=\; \frac{1}{2} \ .$$

Entonces:

$$a_1(t) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\,e^{i\frac{\gamma B}{2}t} \;+\; e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\Big) \;=\; \cos\Big(\frac{\gamma B}{2}t\Big) \ ,$$

$$a_2(t) \;=\; \frac{1}{2}\Big(\,e^{i\frac{\gamma B}{2}t} \;-\; e^{-i\frac{\gamma B}{2}t}\Big) \;=\; i\,\mathrm{sen}\,\Big(\frac{\gamma B}{2}t\Big) \ ,$$

y el vector $|\psi(t)\rangle$ es:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma B}{2}t\right) \\ \\ i\,\mathrm{sen}\,\left(\frac{\gamma B}{2}t\right) \end{pmatrix} \ .$$

Veamos otro metodo para calcular $|\psi(t)\rangle$. Escribamos:

$$|\psi(t)\rangle \,=\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,H\,t}\,|\psi(0)\rangle \ .$$

Teniendo en cuenta que:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\,H\,t} \,=\, e^{i\,\frac{\gamma B}{2}\,t\,\sigma_x} \,=\, \cos\Big(\frac{\gamma B}{2}t\Big) \,+\, i\,\text{sen}\Big(\frac{\gamma B}{2}t\Big)\,\sigma_x \ ,$$

podemos escribir:

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\,H\,t} \,=\, \begin{pmatrix} \cos\big(\frac{\gamma B}{2}t\big) & i\,\text{sen}\big(\frac{\gamma B}{2}t\big) \\ & \\ i\,\text{sen}\big(\frac{\gamma B}{2}t\big) & \cos\big(\frac{\gamma B}{2}t\big) \end{pmatrix} \ .$$

Puesto que

$$|\psi(0)\rangle \,=\, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ,$$

Tenemos:

$$|\psi(t)\rangle \,=\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,H\,t}\,\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,=\, \begin{pmatrix} \cos\big(\frac{\gamma B}{2}t\big) \\ \\ i\,\text{sen}\big(\frac{\gamma B}{2}t\big) \end{pmatrix} \ ,$$

que es exactamente el mismo resultado que el obtenido anteriormente. Los autovectores correspondientes a los dos autovalores de $s_{\vec{n}} \,=\, \frac{\hbar}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{n}$ son:

$$|+,\vec{n}\rangle \,=\, e^{i\alpha_+}\,\begin{pmatrix} e^{-i\phi}\,\cos\frac{\theta}{2} \\ \\ \text{sen}\,\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \ , \qquad\qquad |-,\vec{n}\rangle \,=\, e^{i\alpha_-}\,\begin{pmatrix} e^{-i\phi}\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} \\ \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \ ,$$

siendo $\alpha_\pm$ fases arbitrarias y (θ,ϕ) los angulos que determinan la direccion $\vec{n}$ en coordenadas esfericas. Si $\vec{n}$ esta en el plano yz entonces $\phi = \frac{\pi}{2}$. Tomando $\alpha_\pm = 0$, los vectores $|+,\vec{n}\rangle$ y $|-,\vec{n}\rangle$ son:

$$|+,\vec{n}\rangle \,=\, \begin{pmatrix} -i\,\cos\frac{\theta}{2} \\ \\ \text{sen}\,\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \ , \qquad\qquad |-,\vec{n}\rangle \,=\, \begin{pmatrix} -i\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2} \\ \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \ .$$

Las probabilidades de medir $s_{\vec{n}}$ y obtener $\pm\frac{\hbar}{2}$ son:

$$P_+ \,=\, \big|\,\langle +,\vec{n}|\psi\rangle\big|^2 \ , \qquad\qquad P_- \,=\, \big|\,\langle -,\vec{n}|\psi\rangle\big|^2 \ .$$

Calculemos el producto escalar $\langle +,\vec{n}|\psi\rangle$:

$$\langle +,\vec{n}|\psi\rangle \,=\, \big(i\,\cos\frac{\theta}{2}\,,\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\big)\begin{pmatrix} \cos\big(\frac{\gamma B}{2}t\big) \\ i\,\text{sen}\big(\frac{\gamma B}{2}t\big) \end{pmatrix} \,=\, i\Big[\,\cos\frac{\theta}{2}\,\cos\Big(\frac{\gamma B}{2}t\Big) + \text{sen}\,\frac{\theta}{2}\,\text{sen}\Big(\frac{\gamma B}{2}t\Big)\Big] \ .$$

Es decir:

$$\langle +, \vec{n} | \psi \rangle \; = \; i \cos \left[\frac{\theta}{2} \; - \; \frac{\gamma B}{2} t \right] \; .$$

De forma similar:

$$\langle -, \vec{n} | \psi \rangle \; = \; \left(i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \, , \, - \cos \frac{\theta}{2} \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\gamma B}{2} t \right) \\ i \operatorname{sen} \left(\frac{\gamma B}{2} t \right) \end{pmatrix} \; = \; i \Big[\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \, \cos \Big(\frac{\gamma B}{2} t \Big) - \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \Big(\frac{\gamma B}{2} t \Big) \Big] \; ,$$

o lo que es lo mismo:

$$\langle -, \vec{n} | \psi \rangle \; = \; i \operatorname{sen} \left[\frac{\theta}{2} \; - \; \frac{\gamma B}{2} t \right] \; .$$

Entonces las probabilidades $P_{\pm}$ son:

$$\boxed{ P_{+} \; = \; \cos^2 \left[\frac{\theta \, - \, \gamma B \, t}{2} \right] } \; , \qquad \qquad \boxed{ P_{-} \; = \; \operatorname{sen}^2 \left[\frac{\theta \, - \, \gamma B \, t}{2} \right] }$$

Como comprobacion observemos que se verifica que $P_{+} + P_{-} \, = \, 1$. El valor medio de $s_{\vec{n}} \; = \; \frac{\hbar}{2} \, \vec{\sigma} \cdot \vec{n}$ es:

$$\langle s_{\vec{n}} \rangle_{\psi} \; = \; \frac{\hbar}{2} \left(\cos^2 \left[\frac{\theta \, - \, \gamma B \, t}{2} \right] \; - \; \operatorname{sen}^2 \left[\frac{\theta \, - \, \gamma B \, t}{2} \right] \right) \; .$$

Teniendo en cuenta la formula del coseno del angulo doble, este ultimo resultado puede escribirse como:

$$\boxed{ \langle s_{\vec{n}} \rangle_{\psi} \; = \; \frac{\hbar}{2} \, \cos \Big[\theta \; - \; \gamma B \, t \Big] }$$

[5] Consideremos una particula de espin 1/2 y razon giromagnetica igual a γ. En el instante $t \, = \, 0$ se mide el espin s_y en la direccion del eje y y se obtiene $+\hbar/2$. Posteriormente, para $0 \leq t \leq T$, actua sobre ella el siguiente campo magnetico dirigido en la direccion de l eje z:

$$\vec{B} \; = \; B_0 \, \frac{t}{T} \, \vec{e}_z \; , \qquad \qquad 0 \leq t \leq T \; .$$

Para $t > T$ el campo magnetico es nulo.

a) Obtengase el estado del sistema para $t \geq 0$.

b)¿Cuales son las probabilidades de obtener cada uno de los posibles valores de s_y si se mide para $t > T$?.

Solucion

(a) El hamiltoniano para $0 \leq t \leq T$ es:

$$H \; = \; -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \; = \; -\gamma \, s_z \, B \; = \; -\gamma \, \frac{\hbar}{2} \, \sigma_z \, \frac{B_0 \, t}{T} \;\; ,$$

es decir

$$H \; = \; -\frac{\hbar}{2T} \, \gamma \, B_0 \, t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \;\; .$$

Escribamos el vector de estado $|\psi(t)\rangle$ en la forma:

$$|\psi(t)\rangle \; = \; \begin{pmatrix} c_+(t) \\ c_-(t) \end{pmatrix} \;\; .$$

Entonces, la ecuacion de Schrödinger es:

$$i \, \hbar \begin{pmatrix} \frac{dc_+}{dt} \\ \\ \frac{dc_-}{dt} \end{pmatrix} \; = \; H \, |\psi(t)\rangle \; = \; -\frac{\hbar}{2T} \, \gamma \, B_0 \, t \begin{pmatrix} c_+ \\ \\ -c_-(t) \end{pmatrix} \;\; .$$

Asi pues, las funciones $c_\pm(t)$ satisfacen:

$$\frac{dc_\pm}{dt} \; = \; \pm \frac{\gamma \, B_0}{2T} \, t \, c_\pm \;\; .$$

Para integrar estas ecuaciones separemos variables:

$$\frac{1}{c_\pm} \, \frac{dc_\pm}{dt} \; = \; \frac{d \log c_\pm}{dt} \; = \; \pm \frac{\gamma \, B_0}{2T} \, t \;\; .$$

Integrando los dos miembros, llegamos a:

$$c_\pm(t) \; = \; e^{\pm i \, \frac{\gamma \, B_0}{4T} \, t^2} \; c_\pm(0) \;\; .$$

En el instante inicial el vector de estado es:

$$|\psi(t=0)\rangle \; = \; |+, y\rangle \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle + i|-\rangle \right) \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \;\; .$$

Por lo tanto las constantes de integracion son:

$$c_+(0) \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; , \qquad\qquad c_+(0) \; = \; \frac{i}{\sqrt{2}} \;\; ,$$

y el vector de estado para $0 \leq t \leq T$ es:

$$|\psi(t\rangle \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i \, \frac{\gamma \, B_0}{4T} \, t^2} \\ \\ i \, e^{-i \, \frac{\gamma \, B_0}{4T} \, t^2} \end{pmatrix} \;\; .$$

Cuando $t > T$ el sistema no evoluciona porque el hamiltoniano es cero. Asi pues:

$$|\psi(t \geq T\rangle \;=\; |\psi(t = T\rangle \;.$$

Por lo tanto:

$$|\psi(t \geq T\rangle \;=\; \begin{pmatrix} e^{i\,\frac{\gamma B_0 T}{4}} \\ \\ i\,e^{-i\,\frac{\gamma B_0 T}{4}} \end{pmatrix} \;.$$

(b) Calculemos ahora la amplitud de tener $s_y = +\frac{\hbar}{2}$. Dado que:

$$\langle +, y| \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1\,,\,-i)\;,$$

Tenemos:

$$\langle +, y|\psi(t \geq T\rangle \;=\; \frac{1}{2}\,(1\,,\,-i)\begin{pmatrix} e^{i\,\frac{\gamma B_0 T}{4}} \\ \\ i\,e^{-i\,\frac{\gamma B_0 T}{4}} \end{pmatrix} \;=\; \cos\Big(\frac{\gamma\,B_0\,T}{4}\Big)\;.$$

Por lo tanto, la probabilidad de medir $s_y = +\frac{\hbar}{2}$ para $t \geq T$ es:

$$\boxed{P_{+,y} \;=\; \cos^2\Big(\frac{\gamma\,B_0\,T}{4}\Big)}$$

De forma similar:

$$\langle -, y| \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,(-i\,,\,1)\;,$$

y por lo tanto la amplitud de medir $s_y = -\frac{\hbar}{2}$ es:

$$\langle -, y|\psi(t \geq T\rangle \;=\; \frac{1}{2}\,(-i\,,\,1)\begin{pmatrix} e^{i\,\frac{\gamma B_0 T}{4}} \\ \\ i\,e^{-i\,\frac{\gamma B_0 T}{4}} \end{pmatrix} \;=\; \mathrm{sen}\Big(\frac{\gamma\,B_0\,T}{4}\Big)\;,$$

y la probabilidad correspondiente es:

$$\boxed{P_{-,y} \;=\; \mathrm{sen}^2\Big(\frac{\gamma\,B_0\,T}{4}\Big)}$$

[6] En un espacio de Hilbert bidimensional, sean $|v_1\rangle$ y $|v_2\rangle$ los vectores:

$$|v_1\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\;, \qquad\qquad |v_2\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\;,$$

y el observable representado por el operador $O \;=\; |v_1\rangle\langle v_2| \;+\; |v_2\rangle\langle v_1|$. Obtengase el valor medio de O al medirlo en el estado:

$$|\psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}\;.$$

Solucion

Calculemos directamente $\langle\psi|O|\psi\rangle$:

$$\langle\psi|O|\psi\rangle \;=\; \langle\psi|v_1\rangle\,\langle v_2|\psi\rangle \;+\; \langle\psi|v_2\rangle\,\langle v_1|\psi\rangle \;=\; \langle\psi|v_1\rangle\,\langle\psi|v_2\rangle^* \;+\; \langle\psi|v_2\rangle\,\langle\psi|v_1\rangle^* \;.$$

Este resultado puede escribirse como:

$$\langle\psi|O|\psi\rangle \;=\; 2\,\mathrm{Re}\Big[\langle\psi|v_1\rangle\,\langle\psi|v_2\rangle^*\Big] \;.$$

Pero:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|v_1\rangle \;&=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2,-i)\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}(2+1) \;=\; \frac{3}{\sqrt{5}}\;,\\
\langle\psi|v_2\rangle \;&=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\,(2,-i)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \;=\; \frac{2+i}{\sqrt{5}} \qquad\Longrightarrow\qquad \langle\psi|v_2\rangle^* = \frac{2-i}{\sqrt{5}}\;.
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\langle\psi|v_1\rangle\,\langle\psi|v_2\rangle^* \;=\; \frac{3(2-i)}{5} \qquad\Longrightarrow\qquad \mathrm{Re}\Big[\langle\psi|v_1\rangle\,\langle\psi|v_2\rangle^*\Big] \;=\; \frac{6}{5}\;.$$

Con lo que obtenemos el resultado buscado:

$$\boxed{\langle\psi|O|\psi\rangle \;=\; \frac{12}{5}}$$

[7] El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es:

$$H \;=\; \hbar\big[\,|1\rangle\langle 1| \;+\; 2\,|2\rangle\langle 2|\,\big]\;,$$

donde $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert bidimensional. En el instante $t=0$ medimos la energia E y los observables representados por los operadores:

$$O_1 \;=\; |1\rangle\langle 2| \;+\; |2\rangle\langle 1|\;, \qquad\qquad O_2 \;=\; i\big(\,|1\rangle\langle 2| \;-\; |2\rangle\langle 1|\,\big)\;,$$

y obtenemos los valores medios $\langle E\rangle = \frac{7}{4}\,\hbar$, $\langle O_1\rangle = \frac{3}{4}$ y $\langle O_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

a) Obtengase el vector de estado en la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ y los valores medios de O_1 y O_2 para $t>0$.

b) Compruebese que se verifica el teorema de Ehrenfest para O_1 y O_2.

Solucion

(a) Escribamos el vector de estado el sistema en $t = 0$ en la base $\{|1\rangle, |2\rangle\}$:

$$|\psi\rangle \, = \, |\psi(0)\rangle \, = \, c_1 \, |1\rangle \, + \, c_2 \, |2\rangle \ ,$$

siendo c_1 y c_2 constantes complejas a determinar. La condicion de normalizacion de $|\psi\rangle$ implica:

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 \, = \, 1 \ .$$

Escribamos ahora el valor medio de la energia. Teniendo en cuenta que:

$$\langle\psi| \, = \, c_1^* \, \langle 1| \, + \, c_2^* \, \langle 2| \ ,$$

obtenemos:

$$\frac{7}{4} \, \hbar \, = \, \langle\psi|H|\psi\rangle \, = \, \hbar\big(c_1^* c_1 \, + \, 2 \, c_2^* c_2\big) \ ,$$

o, equivalentemente:

$$|c_1|^2 + 2|c_2|^2 \, = \, \frac{7}{4} \ .$$

Tenemos pues dos ecuaciones para los modulos de c_1 y c_2. Resolviendolas, llegamos a:

$$|c_1| \, = \, \frac{1}{2} \ , \qquad\qquad |c_2| \, = \, \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

Para determinar el estado $|\psi\rangle$ debemos de determinar la fase relativa de c_1 y c_2. Para ello calculemos los valores medios de los observables O_1 y O_2. Puesto que

$$O_1 \, |1\rangle \, = \, |2\rangle \ , \qquad O_1 \, |2\rangle \, = \, |1\rangle \ ,$$

tenemos que $O_1|\psi\rangle \, = \, c_1|2\rangle \, + \, c_2|1\rangle$ y, por consiguiente:

$$\langle O_1\rangle \, = \, \langle\psi|O_1|\psi\rangle \, = \, c_1^* \, c_2 \, + \, c_2^* \, c_1 \ ,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\langle O_1\rangle \, = \, 2 \, \mathrm{Re} \, (c_1 \, c_2^*) \ .$$

De forma similar, puesto que:

$$O_2 \, |1\rangle \, = \, -i|2\rangle \ , \qquad O_2 \, |2\rangle \, = \, i|1\rangle \ ,$$

se verifica que $O_2|\psi\rangle \, = \, -i \, c_1|2\rangle \, + \, i \, c_2|1\rangle$ y entonces:

$$\langle O_2\rangle \, = \, \langle\psi|O_2|\psi\rangle \, = \, i \, c_1^* \, c_2 \, - \, i \, c_2^* \, c_1 \ ,$$

es decir:

$$\langle O_2\rangle \, = \, 2 \, \mathrm{Im} \, (c_1 \, c_2^*) \ .$$

Sin perdida de generalidad pongamos:

$$c_1 \, = \, |c_1| \ , \qquad\qquad c_2 \, = \, |c_2| \, e^{-i\theta} \ ,$$

donde $\theta \in \mathbb{R}$ es una fase. Entonces:

$$c_1\, c_2^* \;=\; |c_1|\,|c_2|\, e^{-i\theta} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4}\, e^{-i\theta} \;.$$

Por tanto:

$$\langle O_1\rangle \;=\; 2\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,\cos\theta \;=\; \frac{3}{4} \qquad\Longrightarrow\qquad \cos\theta \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}\;,$$

$$\langle O_2\rangle \;=\; -2\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,\operatorname{sen}\theta \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad\Longrightarrow\qquad \operatorname{sen}\theta \;=\; -\frac{1}{2}\;.$$

Se sigue que la fase θ vale:

$$\theta \;=\; -\frac{\pi}{6}\;.$$

Por tanto:

$$c_1 \;=\; \frac{1}{2}\;, \qquad\qquad c_2 \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\;,$$

y el vector de estado en $t = 0$ es:

$$|\psi(0)\rangle \;=\; \frac{1}{2}\Big[|1\rangle \;+\; \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\;|2\rangle\Big]\;.$$

Para obtener la evolucion temporal del vector de estado hagamos la substitucion:

$$|1\rangle \to e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar t}|1\rangle \;=\; e^{-it}\,|1\rangle\;, \qquad\qquad |2\rangle \to e^{-\frac{i}{\hbar}\,2\hbar t}|2\rangle \;=\; e^{-2it}\,|2\rangle\;.$$

Entonces:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{1}{2}\Big[e^{-it}\,|1\rangle \;+\; \sqrt{3}\, e^{-2it-i\frac{\pi}{6}}\;|2\rangle\Big] \;=\; c_1(t)\,|1\rangle \;+\; c_2(t)\,|2\rangle\;,$$

siendo:

$$c_1(t) \;=\; \frac{1}{2}\, e^{-it}\;, \qquad\qquad c_2(t) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4}\, e^{-2it-i\frac{\pi}{6}}\;,$$

y en consecuencia:

$$c_1(t)\, c_2^*(t) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{4}\, e^{it+i\frac{\pi}{6}}\;.$$

Por tanto los valores esperados de O_1 y O_2 para $t \geq 0$:

$$\boxed{\langle O_1\rangle_t \;=\; 2\,\mathrm{Re}\,(c_1(t)\, c_2^*(t)) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}\,\cos\big(t + \frac{\pi}{6}\big)}$$

$$\boxed{\langle O_2\rangle_t \;=\; 2\,\mathrm{Im}\,(c_1(t)\, c_2^*(t)) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}\,\operatorname{sen}\big(t + \frac{\pi}{6}\big)}$$

(b) Comprobemos el teorema de Ehrenfest:

$$\frac{d}{dt}\langle O_i\rangle \;=\; -\frac{i}{\hbar}\langle [O_i\,,\,H]\rangle\;, \qquad\qquad (i=1,2)\;.$$

Calculemos el conmutador $[O_1, H]$. Puesto que:

$$O_1\,H \;=\; \hbar\Big[|1\rangle\langle 2| \,+\, |2\rangle\langle 1|\Big]\Big[\,|1\rangle\langle 1| \,+\, 2\,|2\rangle\langle 2|\,\Big] \;=\; \hbar\Big[2\,|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\Big]\;,$$

$$H\,O_1 \;=\; \hbar\Big[\,|1\rangle\langle 1| \,+\, 2\,|2\rangle\langle 2|\,\Big]\Big[|1\rangle\langle 2| \,+\, |2\rangle\langle 1|\Big] \;=\; \hbar\Big[|1\rangle\langle 2| + 2|2\rangle\langle 1|\Big]\;,$$

tenemos:

$$[O_1, H] \;=\; \hbar\Big[|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|\Big] \qquad\Longrightarrow\qquad \boxed{[O_1, H] \;=\; -i\,\hbar\,O_2}$$

Entonces, la primera ecuacion de Ehrenfest es:

$$\frac{d}{dt}\langle O_1\rangle \;=\; -\frac{i}{\hbar}\Big(-\,i\hbar\,\langle O_2\rangle\Big) \qquad\Longrightarrow\qquad \boxed{\frac{d}{dt}\langle O_1\rangle \;=\; -\,\langle O_2\rangle}$$

que puede comprobarse directamente a partir de los valores obtenidos de $\langle O_1\rangle$ y $\langle O_2\rangle$ como funcion del tiempo. Calculemos de manera similar $[O_2, H]$:

$$O_2\,H \;=\; i\,\hbar\Big[|1\rangle\langle 2| \,-\, |2\rangle\langle 1|\Big]\Big[\,|1\rangle\langle 1| \,+\, 2\,|2\rangle\langle 2|\,\Big] \;=\; i\,\hbar\Big[2\,|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|\Big]\;,$$

$$H\,O_2 \;=\; \hbar\Big[\,|1\rangle\langle 1| \,+\, 2\,|2\rangle\langle 2|\,\Big]\,i\,\Big[|1\rangle\langle 2| \,-\, |2\rangle\langle 1|\Big] \;=\; i\,\hbar\Big[|1\rangle\langle 2| - 2|2\rangle\langle 1|\Big]\;,$$

entonces:

$$[O_2, H] \;=\; i\,\hbar\Big[|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\Big] \qquad\Longrightarrow\qquad \boxed{[O_2, H] \;=\; i\,\hbar\,O_1}$$

y la segunda ecuacion de Ehrenfest es:

$$\frac{d}{dt}\langle O_2\rangle \;=\; -\frac{i}{\hbar}\Big(i\hbar\,\langle O_1\rangle\Big) \qquad\Longrightarrow\qquad \boxed{\frac{d}{dt}\langle O_2\rangle \;=\; \langle O_1\rangle}$$

y tambien puede comprobarse directamente.

[8] El hamiltoniano de un sistema de dos niveles es:

$$H = -\frac{\hbar\omega}{2}\left[\,|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\,\right] ,$$

donde ω es una constante y $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ es una base ortonormal del espacio de Hilbert. Considerese el operador $a = |1\rangle\langle 2|$ y su hermitico conjugado $a^\dagger$, a partir de los cuales definimos los operadores hermiticos A y B como:

$$A = a + a^\dagger , \qquad\qquad B = -i(a - a^\dagger) .$$

En el instante inicial $t = 0$ el sistema se encuentra en el autoestado del operador A con autovalor 1.

a) Calculense los valores medios de A, A^2 y la dispersion ΔA en un instante $t > 0$.

b) Repitase el calculo para el operador B y compruebese la desigualdad de Heisenberg para A y B.

Solucion

Teniendo en cuenta que $a^\dagger = |2\rangle\langle 1|$, podemos expresar A como:

$$A = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| .$$

Por tanto:

$$A\,|1\rangle = |2\rangle , \qquad\qquad A\,|2\rangle = |1\rangle .$$

Sea $|\psi\rangle$ el autovector de A de autovalor 1. Pongamos $|\psi\rangle = c_1\,|1\rangle + c_2\,|2\rangle$, siendo c_1 y c_2 coeficientes complejos a determinar. La ecuacion de autovalores de A es:

$$A\,|\psi\rangle = c_1\,|2\rangle + c_2\,|1\rangle = |\psi\rangle = c_1\,|1\rangle + c_2\,|2\rangle .$$

Igualando los coeficientes de los vectores de la base, obtenemos:

$$c_1 = c_2 .$$

Como $\langle\psi|\psi\rangle = 1$, se debe de verificar que $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ que, junto con la condicion $c_1 = c_2$ implica que $2\,|c_1|^2 = 1$, es decir, tomando $c_1 \in \mathbb{R}$, tenemos que:

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Por lo tanto el vector de estado del sistema en $t = 0$ es:

$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|1\rangle + |2\rangle\right] .$$

Para obtener la evolucion temporal de $|\psi\rangle$, tengamos en cuenta que $|1\rangle$ y $|2\rangle$ son autovectores de la energia de autovalores $-\frac{\hbar\omega}{2}$ y $\frac{\hbar\omega}{2}$ respectivamente y, en consecuencia evolucionan en el tiempo como:

$$|1\rangle \to e^{-\frac{i}{\hbar}\,(-\frac{\hbar\omega}{2}\,t)}\,|1\rangle \;=\; e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|1\rangle \;, \qquad\qquad |2\rangle \to e^{-\frac{i}{\hbar}\,(\frac{\hbar\omega}{2}\,t)}\,|2\rangle \;=\; e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|2\rangle \;.$$

Por lo tanto:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|1\rangle \;+\; e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|2\rangle\right] \;.$$

(a) Calculemos el valor medio del operador A. Veamos como actua el operador A sobre el vector de estado para $t \geq 0$:

$$A\,|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|2\rangle \;+\; e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|1\rangle\right] \;.$$

Entonces:

$$\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,\langle 1| \;+\; e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,\langle 2|\right]\left[e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|2\rangle \;+\; e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|1\rangle\right] \;=$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,\langle 1|1\rangle \;+\; e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,\langle 2|2\rangle\right] \;=\; \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t} \;+\; e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\right] \;.$$

o, equivalentemente:

$$\boxed{\langle A\rangle_\psi \;=\; \cos\omega t}$$

Para obtener la dispersion de A en $|\psi(t)\rangle$, calculemos primero como actua A^2 sobre el estado:

$$A^2\,|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|1\rangle \;+\; e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|2\rangle\right] \;=\; |\psi(t)\rangle \;.$$

Se sigue entonces que:

$$\langle A^2\rangle_\psi \;=\; \langle\psi(t)|A^2|\psi(t)\rangle \;=\; \langle\psi|\psi\rangle \;=\; 1 \;.$$

y la dispersion buscada es:

$$(\Delta\,A)_\psi \;=\; \sqrt{\langle A^2\rangle_\psi \;-\; \langle A\rangle_\psi^2} \;=\; \sqrt{1-\cos^2\omega t} \;.$$

En definitiva, obtenemos:

$$\boxed{(\Delta\,A)_\psi \;=\; |\,\mathrm{sen}\,\omega t\,|}$$

(b) Escribamos, en primer lugar, el operador B en la forma:

$$B \;=\; -i\,(a-a^\dagger) \;=\; -i\,\big(|1\rangle\langle 2| \;-\; |2\rangle\langle 1|\big) \;.$$

Entonces:

$$B\,|1\rangle \;=\; i\,|2\rangle \;, \qquad\qquad B\,|2\rangle \;=\; -i\,|1\rangle \;.$$

Por lo tanto, B actua sobre $|\psi(t)\rangle$ en la forma:

$$B\,|\psi(t)\rangle \,=\, \frac{i}{\sqrt{2}}\left[e^{\frac{i\omega t}{2}}\,|2\rangle \,-\, e^{-\frac{i\omega t}{2}}|1\rangle\right] .$$

Eso quiere decir que el valor medio de B en el estado $|\psi(t)\rangle$ es:

$$\langle\psi(t)|B|\psi(t)\rangle \,=\, \frac{i}{2}\left[e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,\langle 1| \,+\, e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,\langle 2|\right]\left[e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|2\rangle \,-\, e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|1\rangle\right] \,=$$

$$=\frac{i}{2}\left[-\,e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,\langle 1|1\rangle \,+\, e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,\langle 2|2\rangle\right] \,=\, \frac{i}{2}\left[e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t} \,-\, e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\right] .$$

Teniendo en cuenta la expresion del seno en terminos de exponenciales complejas, podemos escribir este ultimo resultado en la forma:

$$\boxed{\langle B\rangle_\psi \,=\, -\mathrm{sen}\,\omega t}$$

Para calcular la dispersion de B, observemos que:

$$B^2\,|\psi(t)\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,B|2\rangle \,-\, e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,B|1\rangle\right] \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|1\rangle \,+\, e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|2\rangle\right] .$$

o, lo que es lo mismo:

$$B^2\,|\psi(t)\rangle \,=\, |\psi(t)\rangle \;.$$

Al igual que sucedia con A, esto implica que:

$$\langle B^2\rangle_\psi \,=\, 1 \;,$$

y la dispersion de B en el estado $|\psi(t)\rangle$ es:

$$(\Delta\,B)_\psi \,=\, \sqrt{\langle B^2\rangle_\psi \,-\, \langle B\rangle_\psi^2} \,=\, \sqrt{1-\mathrm{sen}^2\,\omega t}\;,$$

Es decir:

$$\boxed{(\Delta\,B)_\psi \,=\, |\cos\omega t\,|}$$

Comprobemos la desigualdad de Heisenberg para los observables A y B:

$$(\Delta\,A)_\psi\,(\Delta\,B)_\psi \,\geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle_\psi\right| .$$

El primer miembro de esta ecuacion ya lo conocemos. Para obtener el segundo miembro calculemos el conmutador de A y B:

$$AB \,=\, (-i)\Big[|1\rangle\,\langle 2| \,+\, |2\rangle\,\langle 1|\Big]\Big[|1\rangle\langle 2| \,-\, |2\rangle\langle 1|\Big] \,=\, i\Big[|1\rangle\,\langle 1| \,-\, |2\rangle\,\langle 2|\Big]\;,$$

$$BA \,=\, (-i)\,\Big[|1\rangle\langle 2| \,-\, |2\rangle\langle 1|\Big]\,\Big[|1\rangle\,\langle 2| \,+\, |2\rangle\,\langle 1|\Big] \,=\, -i\,\Big[|1\rangle\,\langle 1| \,-\, |2\rangle\,\langle 2|\Big] .$$

Asi pues $AB = -BA$ y, por consiguiente:

$$[A, B] \,=\, 2\,A\,B \,=\, 2i\Big[|1\rangle\,\langle 1| \,-\, |2\rangle\,\langle 2|\Big] \,=\, -\frac{4\,i}{\hbar\omega}\,H \ .$$

De esta relacion entre $[A, B]$ y el hamiltoniano H se sigue que:

$$[A, B]\,|1\rangle \,=\, 2\,i\,|1\rangle \ , \qquad\qquad [A, B]\,|2\rangle \,=\, -2\,i\,|2\rangle \ ,$$

y entonces:

$$[A, B]\,|\psi\rangle \,=\, \sqrt{2}\,i\,\Big[e^{\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|1\rangle \,-\, e^{-\frac{i\,\omega}{2}\,t}\,|2\rangle\Big] \ ,$$

lo que implica que:

$$\langle\psi|\,[A, B]\,|\psi\rangle \,=\, \langle[A, B]\rangle_\psi \,=\, i\,\Big[e^{-\frac{i\omega}{2}\,t}\,\langle 1| \,+\, e^{\frac{i\omega}{2}\,t}\,\langle 2|\Big]\Big[e^{\frac{i\omega}{2}\,t}\,|1\rangle \,-\, e^{-\frac{i\omega}{2}\,t}\,|2\rangle\Big] \,=$$

$$=\, i\,\Big[\langle 1|1\rangle \,-\, \langle 2|2\rangle\Big] \,=\, 0 \ .$$

Por lo tanto la desigualdad de Heisenberg en este caso se reduce a:

$$(\Delta\,A)_\psi\,(\Delta\,B)_\psi \,\geq\, 0 \qquad \Longrightarrow \qquad |\,\mathrm{sen}\,\omega t\,|\,|\cos\omega t\,| \,\geq\, 0 \ ,$$

que se verifica trivialmente.

[9] Sea $|\psi\rangle$ un autovector de un operador hermitico A con autovalor a. Sea B otro operador hermitico. Calculese el valor medio del conmutador $[A, B]$ en el estado $|\psi\rangle$.

Solucion

Por hipotesis

$$A\,|\psi\rangle \,=\, a\,|\psi\rangle \ , \qquad\qquad a \in \mathbb{R} \ .$$

Puesto que A es hermitico:

$$\langle\psi|\,A \,=\, a\,\langle\psi| \ .$$

Entonces:

$$\langle[A, B]\rangle_\psi \,=\, \langle\psi|[A, B]|\psi\rangle \,=\, \langle\psi|\big(AB - BA\big)|\psi\rangle \,=\, a\,\langle\psi|B|\psi\rangle \,-\, a\,\langle\psi|B|\psi\rangle \ .$$

Por lo tanto:

$$\langle[A, B]\rangle_\psi \,=\, 0 \ .$$

[10] Considerese un sistema de dos niveles con hamiltoniano:

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} .$$

En el instante inicial $t = 0$ el sistema se encuentra en el estado:

$$|\psi(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Sean O_1 y O_2 dos observables representados por los siguientes operadores:

$$O_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

a) En el instante $t \geq 0$ se efectuan medidas de O_1 y O_2. Calculense las dispersiones $\Delta_\psi O_1$ y $\Delta_\psi O_2$ de dichas medidas.

b) Verifiquese que se verifica la desigualdad de Heisenberg para O_1 y O_2 en $t \geq 0$. ¿ Para que valores de t dicha desigualdad se convierte en igualdad?.

Solucion

a) Obtengamos el vector de estado para $t \geq 0$. Observemos que H puede escribirse como:

$$H = \hbar \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\hbar \sigma_y .$$

Entonces, el operador de evolucion temporal es:

$$e^{-\frac{i}{\hbar} H t} = \exp\left[i\,\sigma_y t\right] = \cos t + i\sigma_y \operatorname{sen} t = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto el estado en un instante t viene dado por el vector:

$$|\psi(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\text{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} .$$

Calculemos ahora el valor medio de O_1 en el estado $|\psi(t)\rangle$:

$$\langle O_1 \rangle_\psi = \left(\cos t\,, \quad -\operatorname{sen} t\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} = -2\,\cos t \operatorname{sen} t ,$$

es decir:

$$\boxed{\langle O_1 \rangle_\psi = -\operatorname{sen}(2t)}$$

De forma similar podemos obtener el valor medio del observable O_2:

$$\langle O_2\rangle_\psi \;=\; \begin{pmatrix}\cos t\,, & -\mathrm{sen}\, t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t\\ -\mathrm{sen}\, t\end{pmatrix} \;=\; \cos^2 t \;-\; \mathrm{sen}^2\, t \;,$$

que despues de simplificar da:

$$\boxed{\langle O_2\rangle_\psi \;=\; \cos(2t)}$$

Observemos ahora que:

$$O_1^2 \;=\; \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad O_1^2 \;=\; 1 \;,$$

y de forma similar:

$$O_2^2 \;=\; \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad\Longrightarrow\quad O_2^2 \;=\; 1$$

Entonces, se sigue que:

$$\boxed{\langle O_1^2\rangle_\psi \;=\; \langle O_2^2\rangle_\psi \;=\; 1}$$

Calculemos ahora la dispersion del observable O_1 en el estado $|\psi\rangle$:

$$\Delta_\psi O_1 \;=\; \sqrt{\langle O_1^2\rangle_\psi \;-\; \langle O_1\rangle_\psi^2} \;=\; \sqrt{1 \;-\; \mathrm{sen}^{\,2}(2t)} \;,$$

es decir:

$$\boxed{\Delta_\psi O_1 \;=\; |\cos(2t)|}$$

Procediendo de forma similar para el observable O_2, obtenemos:

$$\Delta_\psi O_2 \;=\; \sqrt{\langle O_2^2\rangle_\psi \;-\; \langle O_2\rangle_\psi^2} \;=\; \sqrt{1 \;-\; \cos^{2}(2t)} \;,$$

o, equivalentemente:

$$\boxed{\Delta_\psi O_2 \;=\; |\mathrm{sen}\,(2t)|}$$

b) La desigualdad de Heisenberg es:

$$\Delta_\psi O_1\, \Delta_\psi O_2 \;\geq\; \frac{1}{2}\,\langle [O_1, O_2]\rangle_\psi \;.$$

Calculemos el conmutador $[O_1, O_2]$:

$$[O_1, O_2] \;=\; [\sigma_x\,,\,\sigma_z] \;=\; -2\,i\,\sigma_y \;=\; -2i\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix} \;.$$

Por consiguiente:

$$\langle [O_1, O_2] \rangle_\psi \;=\; \begin{pmatrix} \cos t\,, & -\mathrm{sen}\, t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\mathrm{sen}\, t \end{pmatrix} \;=$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t\,, & -\mathrm{sen}\, t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\mathrm{sen} t \\ 2\cos t \end{pmatrix} \;=\; 2\cos t\, \mathrm{sen} t \;-\; 2\cos t\, \mathrm{sen} t \;,$$

lo que implica que:

$$\langle [O_1, O_2] \rangle_\psi \;=\; 0 \;.$$

La desigualdad de Heisenberg en este caso es pues:

$$\Delta_\psi O_1 \, \Delta_\psi O_2 \;\geq\; 0 \;,$$

o, equivalentemente:

$$\boxed{|\mathrm{sen}\,(2t)|\, |\cos\,(2t)| \;\geq\; 0}$$

Evidentemente esta desigualdad se verifica para todo t. La desigualdad se convierte en igualdad cuando o bien el seno o bien el coseno se anulan, lo que sucede para los tiempos:

$$t \;=\; \frac{n\pi}{4} \;, \qquad\qquad n \;=\; 0\,, 1\,,\, 2\,,\, \cdots$$

[11] Sea O un observable que satisface la siguiente ecuacion cuadratica

$$O^2 - 3\,O + 2 \;=\; 0 \;.$$

¿Que valores podemos obtener al medir O?.

Solucion

Los autovalores λ de O deben de satisfacer la misma ecuacion cuadratica que satisface O, es decir:

$$\lambda^2 - 3\,\lambda + 2 \;=\; 0 \;.$$

Las raices de esta ecuacion son:

$$\lambda \;=\; \frac{3 \pm \sqrt{9 \;-\; 4 \cdot 3}}{2} \;=\; \frac{3 \pm 1}{2} \;,$$

que da

$$\lambda \;=\; 1\,,\, 2 \;.$$

Asi pues, al medir O podemos obtener como resultado el valor 1 o el valor 2.

[12] Una particula de espin 1/2 se encuentra en el instante $t = 0$ en el autoestado de la componente x del espin con autovalor $+\hbar/2$. A partir de ese momento interacciona con un campo magnetico $\vec{B}$ a traves del hamiltoniano:

$$H \,=\, -\mu\,\vec{\sigma}\cdot\vec{B}\ ,$$

siendo μ una constante y $\vec{B}$ un campo que vale:

$$\vec{B} \,=\, (0,0,B) \qquad \text{si}\ \ 0 \le t < T\ ,$$

$$\vec{B} \,=\, (0,B,0) \qquad \text{si}\ \ T \le t \le 2\,T\ ,$$

siendo B una constante.

a) Obtengase el vector de estado para $t = 2\,T$.

b) Determinese la probabilidad de que al medir la componente x del espin en el instante $t = 2T$ obtengamos de nuevo el valor $+\hbar/2$.

Solucion

a) Inicialmente el estado del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle \,=\, |x+\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|z+\rangle \,+\, |z-\rangle\big)\ .$$

En la base de autovectores de σ_z:

$$|\psi(0)\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\ .$$

El operador de evolucion temporal en el intervalo $0 \le t \le T$ toma el siguiente valor para $t = T$:

$$U(T) \,=\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,H\,T} \,=\, e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,\sigma_z\,T}\ .$$

Este operador relaciona $|\psi(0)\rangle$ y $|\psi(T)\rangle$:

$$|\psi(T)\rangle \,=\, U(T)\,|\psi(0)\rangle\ .$$

Calculemos $U(T)$:

$$U(T) \,=\, \cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] \,+\, i\,\text{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right]\sigma_z \,=$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right]+i\,\text{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] & 0\\ 0 & \cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right]-i\,\text{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right]\end{pmatrix}$$

Simplificando, obtenemos:

$$U(T) \;=\; \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \end{pmatrix} \;.$$

Entonces:

$$|\psi(T)\rangle \;=\; U(T)\,|\psi(0)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;,$$

que, tras efectuar el producto de matrices da:

$$\boxed{|\psi(T)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \\ e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \end{pmatrix}}$$

El vector de estado en el instante $t = 2T$ es:

$$|\psi(2T)\rangle \;=\; e^{-\frac{i}{\hbar}\,H\,T}\,|\psi(T)\rangle \;=\; e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,\sigma_y\,T}\,|\psi(T)\rangle \;,$$

donde ahora hemos tomado el hamiltoniano en el intervalo $T \leq t \leq 2T$. Puesto que:

$$e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,\sigma_y\,T} \;=\; \cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] \;+\; i\,\mathrm{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right]\sigma_y \;=\; \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] & \mathrm{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] \\ -\mathrm{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] & \cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] \end{pmatrix} \;,$$

se tiene:

$$|\psi(2T)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] & \mathrm{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] \\ -\mathrm{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] & \cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \\ e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|\psi(2T)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \;+\; \mathrm{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \\ -\mathrm{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \;+\; \cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \end{pmatrix}$$

b) La amplitud de obtener en un medida $S_x = \hbar/2$ en el instante $t = 2T$ es:

$$\langle +x|\psi(2T)\rangle \;=\; \frac{1}{2}(1,1) \begin{pmatrix} \cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \;+\; \mathrm{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \\ -\mathrm{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \;+\; \cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right] e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} \end{pmatrix} \;=$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right]\left(e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} + e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T}\right) \;+\; \mathrm{sen}\left[\frac{\mu\,B\,T}{\hbar}\right]\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T} - e^{\frac{i}{\hbar}\,\mu\,B\,T}\right)\right) \;.$$

Simplificando este resultados, llegamos a:

$$\boxed{\langle +x|\psi(2T)\rangle \;=\cos^2\left[\frac{\mu\, B\, T}{\hbar}\right]\;-\; i\,\mathrm{sen}^{\,2}\left[\frac{\mu\, B\, T}{\hbar}\right]}$$

La probabilidad pedida es pues:

$$\boxed{P \;=\; \Big|\langle +x|\psi(2T)\rangle\Big|^2 \;=\; \cos^4\left[\frac{\mu\, B\, T}{\hbar}\right] + \mathrm{sen}^{\,4}\left[\frac{\mu\, B\, T}{\hbar}\right]}$$

Teniendo en cuenta que $\cos^4 x + \mathrm{sen}^{\,4} x \;=\; (1+\cos^2(2x))/2$, podemos escribir P tambien en la forma:

$$\boxed{P \;=\; \frac{1}{2}\Big(1\;+\;\cos^2\left[\frac{2\mu\, B\, T}{\hbar}\right]\Big)}$$

[13] El hamiltoniano de un sistema es:

$$H \;=\; \hbar\omega\, \sigma_x \;,$$

donde ω es una constante. Obtengase la forma del operador

$$O \;=\; \sigma_y \;,$$

en la imagen de Heisenberg. Compruebese que dicho operador satisface la ecuacion de movimiento.

Solucion

Consideremos $O \;=\; \sigma_y$ en la imagen de Heisenberg:

$$O_H(t) \;=\; e^{\frac{i}{\hbar}\,(t-t_0)\,H}\,\sigma_y\, e^{-\frac{i}{\hbar}\,(t-t_0)\,H} \;=\; e^{i(t-t_0)\,\omega\,\sigma_x}\,\sigma_y\, e^{-i(t-t_0)\,\omega\,\sigma_x} \;.$$

Pongamos $t_0 = 0$ y, puesto que $\sigma_x\,\sigma_y \;=\; -\sigma_y\sigma_x$, se tiene:

$$\sigma_y\, e^{-it\,\omega\,\sigma_x} \;=\; e^{it\,\omega\,\sigma_x}\,\sigma_y \;.$$

Entonces:

$$O_H(t) \;=\; e^{2it\,\omega\,\sigma_x}\,\sigma_y \;=\; \big[\cos(2\omega t)\;+\;i\,\mathrm{sen}\,(2\omega t)\,\sigma_x\big]\,\sigma_y \;.$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_x\,\sigma_y \;=\; i\sigma_z$, obtenemos:

$$\boxed{O_H(t) \;=\; \cos(2\omega t)\sigma_y \;-\; \mathrm{sen}\,(2\omega t)\,\sigma_z}$$

Comprobemos la ecuacion de movimiento en la imagen de Heisenberg:

$$\frac{d\,O_H}{dt} \;=\; \frac{i}{\hbar}\,[H\,,\,O_H]\ .$$

Para ello calculemos el segundo miembro de esta ultima ecuacion:

$$[H\,,O_H] = \hbar\omega\,[\sigma_x, \cos(2\omega t)\sigma_y - \mathrm{sen}\,(2\omega t)\,\sigma_z] = \hbar\omega\cos(2\omega t)\,[\sigma_x\,,\,\sigma_y] - \hbar\omega\,\mathrm{sen}\,(2\omega t)[\sigma_x\,,\,\sigma_z]\ .$$

Teniendo en cuenta que $[\sigma_x\,,\,\sigma_y] = 2i\sigma_z$ y que $[\sigma_x\,,\,\sigma_z] = -2i\sigma_y$, obtenemos:

$$[H\,,O_H] = 2i\hbar\omega\cos(2\omega t)\sigma_z \,+\, 2i\hbar\omega\mathrm{sen}\,(2\omega t)\sigma_y\ .$$

En consecuencia:

$$\boxed{\frac{i}{\hbar}\,[H\,,\,O_H] \;=\; -2\omega\cos(2\omega t)\sigma_z \;-\; 2\omega\,\mathrm{sen}\,(2\omega t)\sigma_y}$$

Calculemos ahora el primer miembro de la ecuacion de movimiento de Heisenberg:

$$\frac{d\,O_H}{dt} \;=\; -2\omega\,\mathrm{sen}\,(2\omega t)\sigma_y - 2\omega\cos(2\omega t)\sigma_z\ ,$$

que coincide con $\frac{i}{\hbar}\,[H\,,\,O_H]$, tal como se queria comprobar.

[14] En una base ortonormal $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ el hamiltoniano de un sistema de dos niveles es:

$$H \;=\; \hbar\Big(|1\rangle\langle 2| \,+\, |2\rangle\langle 1|\Big)\ .$$

a) Si el sistema esta en el estado:

$$|\phi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(|1\rangle \,+\, 2|2\rangle\Big)\ .$$

y se mide la energia, ¿que valores pueden obtenerse y con que probabilidades?.

b) Supongase que en el instante inicial el vector de estado del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|1\rangle \,-\, i|2\rangle\Big)\ .$$

Cuando $t > 0$ se mide el observable

$$A \;=\; |1\rangle\langle 1| \,-\, |2\rangle\langle 2|\ .$$

¿Que valores pueden se pueden obtener en esta medida y con que probabilidades?.

Solucion

La representacion matricial de H es:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \hbar \\ \hbar & 0 \end{pmatrix} .$$

Los autovalores de H se obtienen resolviendo su ecuacion secular

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \hbar \\ \hbar & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \hbar^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \pm\hbar .$$

Obtengamos los correspondientes autovectores. Para $\lambda = +\hbar$ tenemos que resolver

$$\begin{pmatrix} 0 & \hbar \\ \hbar & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A = B \qquad \Longrightarrow \qquad A = B = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

donde, en el ultimo paso, hemos impuesto la condicion de normalizacion. Asi pues, el autoestado $| + \hbar\rangle$ con energia $E = +\hbar$ es:

$$| + \hbar\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\rangle + |2\rangle\big) .$$

De forma similar, para $\lambda = -\hbar$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \hbar \\ \hbar & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = -\hbar \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad A = -B \qquad \Longrightarrow \qquad A = -B = \frac{1}{\sqrt{2}} ,$$

y el autovector con energia $E = -\hbar$ es:

$$| - \hbar\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|1\rangle - |2\rangle\big) .$$

Escribamos los estados $|1\rangle$ y $|2\rangle$ en terminos de los autoestados del hamiltoniano:

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(| + \hbar\rangle + | - \hbar\rangle\big) , \qquad\qquad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(| + \hbar\rangle - | - \hbar\rangle\big) .$$

a)Utilizando las relaciones anteriores, podemos escribir el estado $|\phi\rangle$ como

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\big(3| + \hbar\rangle - | - \hbar\rangle\big) .$$

Por lo tanto, las probablidades de medir $E = \pm\hbar$ cuando el sistema esta en el estado $|\phi\rangle$ son:

$$\text{Prob}\big(E = +\hbar\big) = \frac{9}{10} , \qquad\qquad \text{Prob}\big(E = -\hbar\big) = \frac{1}{10} ,$$

b) Expresemos $|\psi(0)\rangle$ en terminos de los autoestados de la energia $|\pm\hbar\rangle$:

$$|\psi(0)\rangle \;=\; \frac{1-i}{2}\,|+\hbar\rangle \;+\; \frac{1+i}{2}\,|-\hbar\rangle$$

Entonces, el estado para un instante de tiempo $t>0$ es:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{1-i}{2}\,e^{-it}\,|+\hbar\rangle \;+\; \frac{1+i}{2}\,e^{it}\,|-\hbar\rangle\ ,$$

que, en terminos de los vectores $|1\rangle$ y $|2\rangle$ puede ponerse en la forma:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\Big(\frac{1-i}{2}\,e^{-it}+\frac{1+i}{2}\,e^{it}\Big)|1\rangle+\Big(\frac{1-i}{2}\,e^{-it}-\frac{1+i}{2}\,e^{it}\Big)|2\rangle\ .$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{1+i}{2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}\ , \qquad\qquad \frac{1-i}{2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i\pi}{4}}\ ,$$

podemos escribir $|\psi(t)\rangle$ en la forma:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \cos\Big(t+\frac{\pi}{4}\Big)\,|1\rangle \;-\; i\,\mathrm{sen}\,\Big(t+\frac{\pi}{4}\Big)\,|2\rangle\ .$$

Puesto que $A|1\rangle=|1\rangle$ y $A|2\rangle=-|2\rangle$, al hacer una medida de A podemos obtener $A=+1$ o $A=-1$ con las siguientes probabilidades:

$$\mathrm{Prob}\,\big(A=+1\big) \;=\; \cos^2\Big(t+\frac{\pi}{4}\Big)\ ,$$

$$\mathrm{Prob}\,\big(A=-1\big) \;=\; \mathrm{sen}^2\Big(t+\frac{\pi}{4}\Big)\ .$$

[**15**] Considerese un atomo de dos niveles $|F\rangle$ y $|E\rangle$ con hamiltoniano:

$$H \;=\; \frac{\hbar\Delta}{2}\Big(|E\rangle\langle E| \;-\; |F\rangle\langle F|\Big) \;,$$

siendo Δ una constante real. Cuando el atomo se encuentra en el estado $|F\rangle$ y es sometido a un pulso laser rapido cambia en la forma:

$$|F\rangle \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|F\rangle \;-\; i|E\rangle\Big) \;,$$

mientras que si esta en el estado $|E\rangle$ el cambio es:

$$|E\rangle \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|E\rangle \;-\; i|F\rangle\Big) \;.$$

Supongase que un atomo que esta inicialmente en el estado $|F\rangle$ se somete a dos de estos pulsos laser separados por un intervalo de tiempo T, durante el cual evoluciona con el hamiltoniano H. Calculense las probabilidades de que inmediatamente despues del segundo pulso laser el atomo se encuentre en los estados $|F\rangle$ y $|E\rangle$.

Solucion

Tenemos la siguiente secuencia a la que es sometido el atomo:

Pulso laser $\rightarrow$ Evolucion durante un tiempo T $\rightarrow$ Pulso laser

Examinemos cada una de estas transformaciones partiendo desde el estado inicial $|F\rangle$.

- **Primer pulso**

  El estado cambia en la forma:

  $$|F\rangle \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|F\rangle - i|E\rangle\Big) \;\equiv\; |\psi_1\rangle$$

- **Evolucion durante un tiempo** T

  Puesto que $H|E\rangle = \frac{\hbar\Delta}{2}|E\rangle$ y $H|F\rangle = -\frac{\hbar\Delta}{2}|F\rangle$, la evolucion temporal de los estados $|E\rangle$ y $|F\rangle$ es:

  $$|E\rangle \;\rightarrow\; e^{-\frac{i}{\hbar}HT}\,|E\rangle \;=\; e^{-\frac{i\Delta T}{2}}\,|E\rangle \;,$$

  $$|F\rangle \;\rightarrow\; e^{-\frac{i}{\hbar}HT}\,|F\rangle \;=\; e^{\frac{i\Delta T}{2}}\,|F\rangle \;.$$

Entonces, el estado $|\psi_1\rangle$ cambia en la forma:

$$|\psi_1\rangle \;\to\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{i\Delta T}{2}}\,|F\rangle \,-\, i\,e^{-\frac{i\Delta T}{2}}\,|E\rangle\right) \;\equiv\; |\psi_2\rangle$$

- **Segundo pulso**

  El estado $|\psi_2\rangle$ se transforma en el vector $|\psi_3\rangle$, donde:

$$|\psi_3\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{i\Delta T}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|F\rangle - i|E\rangle\big) \,-\, ie^{-\frac{i\Delta T}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|E\rangle - i|F\rangle\big)\right) \;=$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\Big(e^{\frac{i\Delta T}{2}} \,-\, e^{-\frac{i\Delta T}{2}}\Big)|F\rangle \,-\, i\Big(e^{\frac{i\Delta T}{2}} \,+\, e^{-\frac{i\Delta T}{2}}\Big)|E\rangle\Big]\;.$$

  Simplificando esta expresion obtenemos el estado final:

$$|\psi_3\rangle \;=\; i\Big[\mathrm{sen}\,\left(\frac{\Delta T}{2}\right)|F\rangle \,-\, \cos\left(\frac{\Delta T}{2}\right)|E\rangle\Big]\;.$$

  Por lo tanto, las probabilidades pedidas son:

$$\mathrm{Prob}\,\big(F \to F\big) = \mathrm{sen}\,^2\left(\frac{\Delta T}{2}\right)\;, \qquad\qquad \mathrm{Prob}\,\big(F \to E\big) = \cos^2\left(\frac{\Delta T}{2}\right)\;.$$

[16] En un espacio de Hilbert de dimension 3 que tiene como base ortonormal la constituida por los vectores $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$ y $|u_3\rangle$, considerese el observable:

$$A \;=\; |u_1\rangle\langle u_1| \,+\, 2\Big(|u_2\rangle\langle u_3| \,+\, |u_3\rangle\langle u_2|\Big)\;.$$

Supongase que el sistema esta en el estado:

$$|\psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(|u_1\rangle + 2i\,|u_2\rangle\Big),$$

a)¿Cuales son los posibles resultados de una medida de A en este estado y cual es la probabilidad de obtener cada uno de ellos?.

b)¿Cual es el valor medio y la dispersion de A en el estado $|\psi\rangle$?.

Solucion

Escribamos A en forma de matriz en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\;. \tag{0.1}$$

Los valores propios de A son las soluciones de su ecuacion secular:

$$\det(A - \lambda I) \,=\, \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \,=\, (1-\lambda)(\lambda^2 - 4) \,=\, 0 \ ,$$

que son:

$$\lambda \,= 1\,,\, +2\,,\, -2 \ .$$

Obtengamos los correspondientes vectores propios.

- $\boxed{\lambda = 1}$

  El vector propio se obtiene por inspeccion:

$$|1\rangle \,=\, |u_1\rangle$$

- $\boxed{\lambda = 2}$

  Resolvamos el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \,=\, 2 \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = 0,\ B = C \ .$$

  Tomando $B = C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, el vector propio es:

$$|2\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|u_2\rangle + |u_3\rangle\big)$$

- $\boxed{\lambda = -2}$

  El sistema que tenemos que resolver es ahora:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \,=\, -2 \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = 0,\ B = -C \ .$$

  Tomando $B = -C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, el vector propio es:

$$|-2\rangle \,=\, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad |-2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|u_2\rangle - |u_3\rangle\big)$$

La relacion inversa entre los estados de la base y los autoestados de A es:

$$|u_1\rangle \;=\; |1\rangle \;, \qquad |u_2\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|2\rangle + |-2\rangle\big) \;, \qquad |u_3\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|2\rangle - |-2\rangle\big) \;.$$

Escribamos ahora el vector de estado $|\psi\rangle$ en terminos de los autovectores de A:

$$|\psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(|1\rangle \;+\; i\sqrt{2}\,(|2\rangle + |-2\rangle)\Big) \;,$$

Entonces, los resultados posibles en la medida de A y sus probabilidades son:

$$A = 1 \qquad \Longrightarrow \quad \mathrm{Prob}\,(A=1) \;=\; \frac{1}{5} \;,$$

$$A = +2 \qquad \Longrightarrow \quad \mathrm{Prob}\,(A=2) \;=\; \left|\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right|^2 \;=\; \frac{2}{5} \;,$$

$$A = -2 \qquad \Longrightarrow \quad \mathrm{Prob}\,(A=-2) \;=\; \left|\frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right|^2 \;=\; \frac{2}{5} \;.$$

[17] Un sistema de tres niveles tiene, en una base ortonormal $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, el hamiltoniano siguiente:

$$H \;=\; \hbar\omega \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;.$$

Sea A el observable cuya expresion en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ es:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} \;.$$

En el instante inicial $t=0$ el sistema se encuentra en el estado $|\psi(0)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + i|u_2\rangle)$.

a) Encuentrese una base de autovectores comunes a H y A. Justifiquese porque esto es posible.

b)¿Cuales son las probabilidades de medir los diferentes valores de A para $t>0$ si en $t=0$ se encuentra en el estado $|\psi(0)\rangle$ escrito mas arriba?.

c) Supongase que en $t=0$ se mide A y se obtiene el maximo valor posible. Despues de la medida se deja evolucionar el sistema un tiempo t y se mide la energia. ¿Cuales son las probabilidades de los posibles resultados de dicha medida?.

Solucion

a) Puesto que $[H, A] = 0$, los operadores H y A son simultaneamente diagonalizables. Puesto que H esta ya diagonalizado en la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, encontremos los autovalores de A y sus autovectores. Tenemos que resolver la ecuacion:

$$\det(A - \lambda I) \; = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2i \\ 0 & -2i & -\lambda \end{vmatrix} = \; (2-\lambda)(\lambda^2 - 4) \; = \; 0 \; ,$$

cuyas soluciones son $\lambda = 2$ (doblemente degenerado) y $\lambda = -2$. Encontremos los autovectores correspondientes a estos autovalores. En primer lugar observemos que $|u_1\rangle$ es autovector de A con autovalor 2 y de H con autovalor $-\hbar\omega$. Escribamos:

$$| -\hbar\omega, 2\rangle \; = \; |u_1\rangle \; ,$$

Obtengamos el otro autovector de A con autovalor $+2$ y de H con autovalor $+\hbar\omega$. Pare asegurarnos de que sea ortogonal a $|-\hbar\omega, 2\rangle$, pongamos la primera componente de este vector a cero. Tenemos que resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ C \end{pmatrix} \; = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ C \end{pmatrix} \;\; \Longrightarrow \;\; C = -iB \; .$$

Tomando $B = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C = -\frac{i}{\sqrt{2}}$, llegamos al vector:

$$| +\hbar\omega, 2\rangle \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|u_2\rangle \; - \; i|u_3\rangle \Big) \; .$$

De la misma manera, podemos encontrar el autovector con autovalores $+\hbar\omega$ y -2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ C \end{pmatrix} \; = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ C \end{pmatrix} \;\; \Longrightarrow \;\; C = iB \; .$$

Tomando $B = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $C = \frac{i}{\sqrt{2}}$ tenemos el vector:

$$| +\hbar\omega, -2\rangle \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|u_2\rangle \; + \; i|u_3\rangle \Big) \; .$$

La relacion inversa entre los vectores de la base y los autovectores es:

$$|u_1\rangle \; = \; |-\hbar\omega, 2\rangle \; , \qquad |u_2\rangle \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|+\hbar\omega, 2\rangle + |+\hbar\omega, -2\rangle \Big) \; , \qquad |u_3\rangle \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(|+\hbar\omega, 2\rangle - |+\hbar\omega, -2\rangle \Big) \; .$$

b) Puesto que:

$$|u_1\rangle + i|u_2\rangle \; = \; | -\hbar\omega, 2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \Big(| +\hbar\omega, 2\rangle + | +\hbar\omega, -2\rangle \Big) \; ,$$

el estado inicial del sistema es:

$$|\psi(0)\rangle \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|-\hbar\omega,2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\Big(|+\hbar\omega,2\rangle + |+\hbar\omega,-2\rangle\Big)\right] \; .$$

La evolucion temporal de los autoestados es:

$$|-\hbar\omega,2\rangle \;\to\; e^{i\omega t}\,|-\hbar\omega,2\rangle \;, \qquad\qquad |+\hbar\omega,\pm 2\rangle \;\to\; e^{-i\omega t}\,|+\hbar\omega,\pm 2\rangle \; .$$

Por lo tanto, el vector de estado del sistema en el instante $t \geq 0$ es:

$$|\psi(0)\rangle \; = \; \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{i\omega t}\,|-\hbar\omega,2\rangle + \frac{ie^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}\Big(|+\hbar\omega,2\rangle + |+\hbar\omega,-2\rangle\Big)\right] \; .$$

La probabilidad de medir $A = 2$ es:

$$\text{Prob}\,(A=2) \; = \; \frac{1}{2}\big|e^{i\omega t}\big|^2 \; + \; \frac{1}{2}\left|\frac{ie^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}\right|^2 \; = \; \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \; = \; \frac{3}{4} \; .$$

La probabilidad de medir $A = -2$ es:

$$\text{Prob}\,(A=-2) \; = \; \frac{1}{2}\left|\frac{ie^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}\right|^2 \; = \; \frac{1}{4} \; .$$

Estas probabilidades sin independientes de t porque el observable A es una constante de movimiento debido a que conmuta con el hamiltoniano H.

c) Si se mide A en $t = 0$ y se obtiene $A = +2$, el estado reducido inmediatamente despues de la medida es:

$$|\psi(0)\rangle_{red} \; = \; N\Big(|+\hbar\omega,2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|+\hbar\omega,-2\rangle\Big) \; ,$$

siendo N una constante de normalizacion, que debe de satisfacer:

$$N^2\left(1 + \frac{1}{2}\right) \; = \; 1 \;\Longrightarrow\; N \; = \; \sqrt{\frac{2}{3}} \; .$$

Por lo tanto:

$$|\psi(0)\rangle_{red} \; = \; \sqrt{\frac{2}{3}}\Big(|+\hbar\omega,2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|+\hbar\omega,-2\rangle\Big) \; .$$

La evolucion temporal da lugar al siguiente estado en el instante de tiempo t:

$$|\psi(t)\rangle \; = \; \sqrt{\frac{2}{3}}\Big(e^{i\omega t}\,|+\hbar\omega,2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}\,|+\hbar\omega,-2\rangle\Big) \; .$$

Al medir la energia podemos obtener $-\hbar\omega$ o $+\hbar\omega$ con las probabilidades siguientes:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Prob}(-\hbar\omega) &= \left|\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\omega t}\right|^2 = \frac{2}{3}\ , \\
\operatorname{Prob}(+\hbar\omega) &= \left|\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}\right|^2 = \frac{1}{3}\ .
\end{aligned}
$$